SUJET DE THÈSE: K-THÉORIE HERMITIENNE ET THÉORIE HOMOTOPIQUE DES SCHÉMAS

Proposé par Baptiste Calmès

1. Contexte

La *géométrie algébrique* est un domaine majeur en mathématiques, à l'intersection entre la géométrie, l'algèbre et l'arithmétique, et dont les méthodes ont fourni de nombreux résultats fondamentaux au cours de l'histoire des mathématiques, et plus spécifiquement au cours des 60 dernières années.

Les *schémas* sont les objets d'étude de la géométrie algébrique. Il s'agit d'objets géométriques définis à l'aide d'équations polynômiales.

Ces objets sont extrêmement compliqués en général, et pour simplifier leur étude, on utilise des invariants, qui permettent d'extraire le plus simplement possible une partie de l'information contenu dans l'objet de départ.

La *K-théorie hermitienne* est un de ces invariants, et sa construction est en rapport avec les formes quadratiques. Elle a été inventée au début des années 1970 par Karoubi et Villamayor [5], et a été l'objet d'une attention constante depuis.

Par ailleurs, la *théorie homotopique des schémas* est une version adaptée à la géométrie algébrique de la théorie homotopique des espaces topologique. En simplifiant à l'extrême, l'idée est de ne pas distinguer des schémas qui ont certains invariants communs, appelés groupes d'homotopie.

Cette théorie homotopique des schémas a été inventée et initialement construite par Morel et Voevodsky [7], ce dernier ayant reçu la médaille Fields pour des résultats obtenus en lien avec ces constructions. Depuis, elle a été l'objet de nombreuses études et a fourni des résultats fondamentaux, mais comme tous les cadres mathématiques riches, elle est d'une grande complexité.

Un résultat profond de Morel [6] relie fortement certains groupes de K-théorie hermitienne et la théorie homotopique des schémas.

Très récemment, en utilisant un cadre récent appelé les ∞-catégories, B. Calmès et al. [2, 3, 4] ont donné une définition plus générale de la K-théorie hermitienne, ce qui leur a permi de résoudre plusieurs conjectures sur le sujet et de mener certains calculs difficiles auparavant.

2. SUJET

La thèse envisagée consistera à utiliser les nouvelles méthodes développées par Calmès et al. et les appliquer à l'étude de la théorie homotopique des schémas où la K-théorie hermitienne apparaît par les résultats de Morel mentionnés plus haut. Il y a par exemple plusieurs résultats existants qui sont susceptibles d'êtres améliorés. Certains sont liés à la caractéristique 2, cas qui est jusqu'ici souvent exclus, mais qui peut être traîté grâce à la nouvelle construction de la K-théorie hermitienne.

D'autres résultats, en lien avec la géométrie réelle et les travaux de Bachmann [1], peuvent être envisagés.

RÉFÉRENCES

[1] T. Bachmann. Motivic and real étale stable homotopy theory. Compos. Math. 154 (2018), no. 5, 883–917

[2] B. Calmès, E. Dotto, Y. Harpaz, F. Hebestreit, M. Land, K. Moi, D. Nardin, T. Nikolaus, and W. Steimle. Hermitian K-theory for stable ∞-categories i : Foundations. à paraître dans Selecta Mathematica, 2022.

[3] B. Calmès, E. Dotto, Y. Harpaz, F. Hebestreit, M. Land, K. Moi, D. Nardin, T. Nikolaus, and W. Steimle. Hermitian k-theory for stable ∞-categories II : Cobordism categories and additivity, 2021.

[4] B. Calmès, E. Dotto, Y. Harpaz, F. Hebestreit, M. Land, K. Moi, D. Nardin, T. Nikolaus, and W. Steimle. Hermitian k-theory for stable ∞-categories III : Grothendieck-witt groups of rings, 2021.

[5] M. Karoubi and O. Villamayor. K-théorie hermitienne. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 272 :A1237–A1240, 1971.

[6] F. Morel. On the motivic π_0 of the sphere spectrum. In *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, volume 131 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 219–260. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[7] F. Morel and V. Voevodsky. $\mathbf{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (90) :45–143 (2001), 1999.