Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche et d'Enseignement Supérieur

Ecole doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur Lille Nord-de-France - 072

Titre : Quasi-Euclidean rings

Financement prévu : Université d'Artois, bourse doctorale
Cofinancement éventuel :

Directeur de thèse : André Leroy
E-mail :
Co-directeur de thèse :
E-mail :

Laboratoire : nom labo – UMR ….. ou FRE ….. ou EA …..
Equipe : MESA

Descriptif : La notion de domaine euclidien a été étendue à celle de k-stage euclidien par Cooke avec pour but de couvrir un plus large spectre d'anneaux d'entiers algébriques. Cette notion s'est développée ensuite pour des anneaux noncomutatifs et il y a environ 5 ans Jain, Lam et moi-même avons introduits la notion d'anneaux quasi-euclidiens (à droite ou à gauche). Un anneau R est dit euclidien à droite si pour toute pair d'éléments (a,b) il existe une série « de divisions euclidiennes » du type « a=bq+r »qui se termine par une division exacte. On ne suppose pas ici l'existence d'une fonction d'Euclide pour ces divisions. Le fait qu'une pair (a,b) soit euclidienne est en relation avec les polynômes continuants et ces polynômes admettent des généralisations et des interprétations qui ont été développées par Facchini et moi-même il y a environ 3 ans. Le fait qu'une pair soit euclidienne est aussi une condition suffisante pour que certaines matrices 2x2 construites avec (a,b) puissent s'écrire comme un produit de matrices idempotentes. Un bon exemple d'anneaux quasi eclidiens est celui des anneaux unité von Neumann (pour tout élément a il existe u inversible tel que a=aua) qui comprend les anneaux anneaux semi-simples par exemple. Certaines pairs d'éléments apparaissent naturellement comme pair euclidienne lorsque 'un des élément est un idempotent
L'objet de cette thèse sera de:
-découvrir de nouveaux exemples d'anneaux quasi-euclidiens à droite (à gauche),
-tester la possibilité d'utiliser les polynômes continuants de manière plus approfondie (comment constuire des anneaux QE à partir des polynômes contnuants, influence des propriétés des polynômes continuants...) et de voir quel pourrait être l'impact des généralisations mentionnées plus haut.
-déterminer quel sont les anneaux quasi-euclidiens parmi les anneaux de von Neumann (non nécesairement « unité von Neumann »).
-déterminer quand un anneau de groupe (non semi-simple...) est un anneau quasi euclidien à droite ?
-Caractériser les anneaux principaux à droite ou à gauche qui sont quasi-euclidiens.à droite ou à gauche.
-Caractériser les anneaux quasi-Euclidiens qui sont de Dedekind fini (c'est a dire qui vérifient la condition ab=1 ===> ba=1 ; Ils ne le sont pas tous.)

Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche
et d'Enseignement Supérieur

Bibliographie

A.~Alahmadi, S.K.Jain, T.Y.Lam and A. Leroy:
Euclidean pairs and quasi-Euclidean rings} J. Algebra **406**, (2014)
154-170.

A.Alahmadi, S.K.Jain, A. Leroy, Sathaye:
Decompositions innto products of idemptents., Electronic Journal of Linear
Algebra, **29** (2015) 74-88.

A.Alahmadi, S.K. Jain, and A. Leroy: Decomposition
of singular matrices into idempotents. Linear Multilinear Algebra **62**
, No.1, (2014) 13-27.

A.Alahmadi, S.K. Jain, and A. Leroy:
quasi-permutation singular matrices are products of idempotents, Linear
algebra and its Applications **496** (2016), 487-495.

A. Facchini and A. Leroy :Leapfrog Constructions: From Continuant Polynomials to Permanents of Matrices,
The electronic journal of combinatorics, **22,** 2015

T.Y.Lam: Lectures on Modules and Rings, Graduate Texts in Math. Vol 189 Spriger-Verlag (1999)

A.~Leutbecher: Euklidischer Algorithmus und die Gruppe GL$_2$. Math. Ann. **231** (1978), 269--285.